第 16 講　指数関数・対数関数

1 ［1］　実数 x が $4^x+4^{-x}=7$ をみたすとき，8^x+8^{-x} の値を求めよ．

［2］　$a=\log_2 5$，$b=\log_2 9$ のとき，$\log_4 150$ を a，b を用いて表せ．

［3］　a は正の実数で，$b=32a^3$ とする．$x=\log_2 b$，$y=\log_2 a$ とおくとき，y を x を用いて表せ．

【Point Pickup】

［1］　指数関数の「底の変換」

指数関数は，自分の好きな底に変えることは困難である．

$4=2^2$，$27=3^3$ のように「　　　　」で表し直すことで，底を目的のものに変換する．

指数関数 a^x の符号について

a^x の符号はつねに「　　　」である．

逆に，a^x が 0 やマイナスになる x は「　　　　　　　　」.

［2］　対数関数の「底の変換」と「真数」について

底の変換公式　　$\log_a b=\dfrac{\log_c}{\log_c}$

また，真数を「　　　　　　　　」し，

$\log_a M^p=p\log_a M$

$\log_a M\times N=\log_a M+\log_a N$　，$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

などを用いて真数を小さくすることができる．

［3］　対数と指数の書き換え　　$x=\log_a b \Longleftrightarrow$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　方程式 $2\cdot8^{x}-3\cdot4^{x+1}+5\cdot2^{x+1}+24=0$ を解け．

[2]　次の不等式を解け．

(1)　$\log_2 2x+\log_2(x-7)<2\log_2(x-3)$　　(2)　$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(2-x)<0$

【Point Pickup】

[1]　指数方程式 $a^{x}=N$ について

$N>0$ のとき　x は「　　　　　」存在する．

$N=0$，$N<0$ のとき，x は「　　　　　」．

対数で表す

$a^{x}=b$　より　$x=\log_a b$

[2]　対数の相等，大小

$\log_a x_1=\log_a x_2 \iff x_1=x_2$

　　　　のとき　$\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1<x_2$

　　　　のとき　$\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1>x_2$

これを利用し，対数方程式・不等式の解，対数やその真数のとり得る値を出す．

また，「　　　条件」に注意．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　関数 $y=3^{2x+1}-5\cdot 3^{x+1}$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値，最小値を求めよ．

[2]　(1)　関数 $y=2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-4\log_{\frac{1}{2}}x$ $\left(\frac{1}{4}\leqq x\leqq 8\right)$ の最大値，最小値を求めよ．

(2)　$x>0$，$y>0$，$2x+y=8$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$ の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　指数の大小

のとき　$x_1<x_2 \iff a^{x_1}<a^{x_2}$

のとき　$x_1<x_2 \iff a^{x_1}>a^{x_2}$

[2]　置き換え型ではない対数関数

→「1つ」の対数関数にする．

$a>1$　のとき　真数が最大 $\iff$ 対数の値は「　　　」

$0<a<1$　のとき　真数が最大 $\iff$ 対数の値は「　　　」

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　指数関数・対数関数

[1] (1)　$2^x+2^{-x}=3$ のとき　$4^x+4^{-x}=$ ア である.

(2)　$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき, $(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=$ イ $\sqrt{\text{ウ}}$ である.

[2] (1)　方程式 $8^x-3\cdot4^x-3\cdot2^{x+1}+8=0$ の解は　$x=$ エ , オ である.

(2)　不等式 $\log_2(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<3$ の解は カ $<x<$ キ である.

[3] (1)　$y=4^x-2^{x+2}+1$ の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値は $-$ ク である.

(2)　$f(x)=\log_2(x+7)+\log_2(1-x)$ は $x=$ ケコ のとき最大値をとる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　指数関数・対数関数

1 [1]　実数 x が $4^x+4^{-x}=7$ をみたすとき，8^x+8^{-x} の値を求めよ.

$4^x+4^{-x}=7$ より　$(2^x)^2+(2^{-x})^2=7$

$2^x=X$ とおくと $X>0$，また　$2^{-x}=\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{1}{X}$

このとき　$X^2+\dfrac{1}{X^2}=7$　つまり　$\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2-2=7$　$\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2=9$

$X+\dfrac{1}{X}>0$ より　$X+\dfrac{1}{X}=3$

よって　$8^x+8^{-x}=(2^x)^3+(2^{-x})^3=X^3+\dfrac{1}{X^3}$

$$=\left(X+\frac{1}{X}\right)\left(X^2-1+\frac{1}{X^2}\right)=3\cdot(7-1)=\mathbf{18}$$

1 [2]　$a=\log_2 5$，$b=\log_2 9$ のとき，$\log_4 150$ を a，b を用いて表せ.

$a=\log_2 5$

$b=\log_2 9=\log_2 3^2=2\log_2 3$　より　$\dfrac{b}{2}=\log_2 3$

$\log_4 150=\dfrac{\log_2 150}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(5^2\times3\times2)}{2}=\dfrac{2\log_2 5+\log_2 3+1}{2}$

$$=\frac{2a+\frac{b}{2}+1}{2}=\boldsymbol{\frac{4a+b+2}{4}}$$

1 [3]　a は正の実数で，$b=32a^3$ とする．$x=\log_2 b$，$y=\log_2 a$ とおくとき，y を x を用いて表せ.

$x=\log_2 b$，$y=\log_2 a$ より　$2^x=b$，$2^y=a$

$b=32a^3$　より　$2^x=32\times(2^y)^3$　　$2^x=2^{3y+5}$　　よって　$x=3y+5$　より　$\boldsymbol{y=\dfrac{x-5}{3}}$

(別解)　$b=32a^3$ において $a>0$ より $b>0$

よって両辺正より，底を2とする対数をとると

$\log_2 b=\log_2 32a^3=5+3\log_2 a$

$x=\log_2 b$，$y=\log_2 a$ より　$x=5+3y$　　よって　$y=\dfrac{x-5}{3}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］　方程式 $2\cdot 8^x-3\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+1}+24=0$ を解け.

$2\cdot 8^x-3\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+1}+24=0$　より　$2\cdot(2^x)^3-12\cdot(2^x)^2+10\cdot 2^x+24=0$

$2^x=X$ とおくと $X>0$

$2X^3-12X^2+10X+24=0$　　$X^3-6X^2+5X+12=0$

$(X+1)(X-3)(X-4)=0$　　$X>0$ より　$X=3,\ 4$

つまり　$2^x=3,\ 4$　より　$\boldsymbol{x=\log_2 3,\ 2}$

2 ［2］　次の不等式を解け.

(1)　$\log_2 2x+\log_2(x-7)<2\log_2(x-3)$　　(2)　$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(2-x)<0$

(1)　真数は正より　$x>0,\ x-7>0,\ x-3>0$　つまり　$x>7$　……①

このとき $\log_2 2x+\log_2(x-7)<2\log_2(x-3)$　より

$\log_2 2x(x-7)<\log_2(x-3)^2$

底2は1より大きいので　$2x(x-7)<(x-3)^2$　　$x^2-8x-9<0$

$(x-9)(x+1)<0$　　$-1<x<9$

①より　$\boldsymbol{7<x<9}$

(2)　真数は正より　$x-1>0,\ 2-x>0$　つまり　$1<x<2$　……①

このとき　$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(2-x)<0$　より

$\log_2(x-1)+\dfrac{\log_2(2-x)}{\log_2\frac{1}{2}}<0$　　$\log_2(x-1)-\log_2(2-x)<0$

$\log_2(x-1)<\log_2(2-x)$

底2は1より大きいので　$x-1<2-x$　　$x<\dfrac{3}{2}$　　①より　$\boldsymbol{1<x<\dfrac{3}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　関数 $y=3^{2x+1}-5\cdot3^{x+1}$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値，最小値を求めよ．

$y=3^{2x+1}-5\cdot3^{x+1}=3\cdot(3^x)^2-15\cdot3^x$

$3^x=t$ とおくと，$-2\leqq x\leqq 1$ より　$3^{-2}\leqq t\leqq 3^1$　　つまり　$\frac{1}{9}\leqq t\leqq 3$

このとき　$y=3t^2-15t=3\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{75}{4}$

y のグラフは軸が $\frac{5}{2}$，下に凸の放物線より

$t=\frac{1}{9}$ のとき　最大値　$3\left(\frac{1}{9}\right)^2-15\cdot\frac{1}{9}=\mathbf{-\frac{44}{27}}$

$t=\frac{5}{2}$ のとき　最小値　$\mathbf{-\frac{75}{4}}$

3 ［2］　(1)　関数 $y=2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-4\log_{\frac{1}{2}}x$ $\left(\frac{1}{4}\leqq x\leqq 8\right)$ の最大値，最小値を求めよ．

(2)　$x>0$，$y>0$，$2x+y=8$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$ の最大値を求めよ．

(1)　$\log_{\frac{1}{2}}x=t$ とおくと　$\frac{1}{4}\leqq x\leqq 8$ より　$-3\leqq t\leqq 2$

このとき　$y=2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-4\log_{\frac{1}{2}}x=2t^2-4t=2(t-1)^2-2$

よって　$t=-3$ のとき　最大値　$2\cdot(-3)^2-4\cdot(-3)=\mathbf{30}$

$t=1$ のとき　最小値　$\mathbf{-2}$

(2)　$2x+y=8$ より　$y=8-2x$　　$y>0$ より　$8-2x>0$　$x<4$

これと $x>0$ より　$0<x<4$

このとき　$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 x+\log_2(8-2x)$

$=\log_2 x(8-2x)=\log_2(-2x^2+8x)$

$=\log_2\{-2(x-2)^2+8\}$

底 2 は 1 より大きいので，真数が最大のときにこの式の値は最大になる．

よって　$x=2$，$y=4$ のとき　最大値　$\log_2 8=\mathbf{3}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　指数関数・対数関数

[1] (1)　$2^x+2^{-x}=3$ のとき　$4^x+4^{-x}=$ ア である.

(2)　$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき, $(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=$ イ $\sqrt{\text{ウ}}$ である.

[2] (1)　方程式 $8^x-3\cdot4^x-3\cdot2^{x+1}+8=0$ の解は　$x=$ エ , オ である.

(2)　不等式 $\log_2(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<3$ の解は　カ $<x<$ キ である.

[3] (1)　$y=4^x-2^{x+2}+1$ の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値は $-$ ク である.

(2)　$f(x)=\log_2(x+7)+\log_2(1-x)$ は $x=$ ケコ のとき最大値をとる.

解答例

[1] (1)　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=3^2-2=\mathbf{7}$

(2)　$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$　より　$10^x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$　　$(10^x)^2=7+4\sqrt{3}$

$(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=(10^x)^2-(10^{-x})^2=(10^x)^2-\{(10^x)^2\}^{-1}$

$=7+4\sqrt{3}-\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3}-(7-4\sqrt{3})=\mathbf{8\sqrt{3}}$

[2] (1)　$8^x-3\cdot4^x-3\cdot2^{x+1}+8=0$　より　$(2^x)^3-3\cdot(2^x)^2-3\cdot2\cdot2^x+8=0$

$2^x=X$ とおくと, $X>0$

このとき　$X^3-3X^2-6X+8=0$　　$(X-1)(X-4)(X+2)=0$

$X>0$ より　$X=1,\ 4$　　つまり　$2^x=1,\ 4$　　よって　$x=\mathbf{0,\ 2}$

(2)　真数は正より　$x-1>0,\ x-3>0$　よって $x>3$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=\dfrac{\log_2(x-3)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(x-3)$ より

$\log_2(x-1)+\log_2(x-3)<3$　　　$\log_2(x-1)(x-3)<\log_2 8$

底2は1より大きいので　$(x-1)(x-3)<8$　　$(x-5)(x+1)<0$　　$-1<x<5$

$x>3$ より　$\mathbf{3<x<5}$

[3] (1)　$y=4^x-2^{x+2}+1=(2^x)^2-4\cdot2^x+1$　　$2^x=t$ とおくと　$-1\leqq x\leqq 3$ より $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 8$

このとき　$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$　より　$t=2$ のとき最小値 $\mathbf{-3}$ をとる.

(2)　真数条件より　$-7<x<1$

$f(x)=\log_2(x+7)+\log_2(1-x)=\log_2(x+7)(1-x)$

$=\log_2(-x^2-6x+7)=\log_2\{-(x+3)^2+16\}$　　よって $x=\mathbf{-3}$ で最大となる.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。